შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

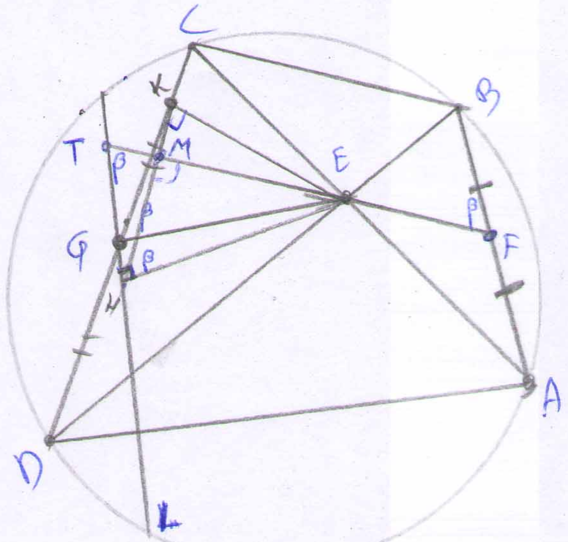
21.04.2012/ მათ/ I/ 075

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

მოც: $l \parallel AB$
$AC \cap BD = E$
$EH \perp l$
$EK \perp CD$
$F \in AB$
$AF = FB$
$G \in CD$
$DG = CG$
$EF \cap HK = M$.
$N \in EH$; $EN = NH$

ვ.დ. $EH = 2MN$



ვინაიდან $\angle DCA = \angle DBA$ $\angle BDC = \angle CAB \Rightarrow \Delta DCE \sim \Delta ABE \Rightarrow$

$\frac{DC}{AB} = \frac{CE}{BE} = \frac{DE}{AE}$ $DC \equiv 2x$ $AB \equiv 2y \Rightarrow GC = x$; $FB = y$; ანუ

წინა მტკიცებიდან

$\frac{CE}{BE} = \frac{DE}{AE} = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$; განვიხილოთ ΔECG და ΔEBF ~~FG~~ $\frac{EC}{EB} = \frac{x}{y} = \frac{CG}{FB}$;

და $\angle GCE = \angle EBF \Rightarrow \Delta GCE \sim \Delta FBE$ - (ორი გვერდის შესაბამისი პროპორციულობა და მათ შორის კუთხის ტოლობა) ანუ $\angle EGC = \angle EFB \equiv \beta$; ვინაიდან $\angle GHE + \angle EKG = 90 + 90 = 180^0 \Rightarrow$

$EKGH$ - ჩახაზულია $\Rightarrow \angle EGK = \angle EHK = \beta \Rightarrow \angle MHG = 90 - \beta$; EF წრფე l წრფეს გადაკვეთს წერტილში დავარქვათ T. ვინაიდან $l \parallel AB$ EF მათი მკვეთი წრფე

შესაბამისი კუთხეები ტოლია ანუ $\angle EFB = \angle ETG = \beta$; $\angle HTE = \beta$ $\angle THM = 90 - \beta \Rightarrow$

$\angle TMH = 90^0 \Rightarrow \angle HME = 90^0$; ანუ გამოდის რომ HME მართკუთხა სამკუთხედი

და N HE-ს შუაწერტილი მაშინ MN გამოვა (მართი კუთხიდან გავლებული) მედიანა და ვიცით რომ მართკუთხა

სამკუთხედში მართი კუთხიდან გავლებული მედიანა ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია ანუ

$MN = \frac{HE}{2} \Rightarrow 2MN = HE$

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 075

ამოცანა № 2.

გვერდი № 1

ამოხსნა.

დავუშვათ n-ისთვის ხომ არ n წვერი [illegible] $\frac{2}{3}n$-ზე [illegible]

[illegible] $a_1, a_2, \dots a_n$. [illegible] $b_1, b_2, \dots b_n$; [illegible] a_i [illegible] a_i-ს [illegible] b_i-ს [illegible] a_i-ს [illegible] b_i-ს [illegible] b_i-ს [illegible] a_i-ს [illegible] a_i [illegible] b_i-ს [illegible] b_i-ს და a_i-ს [illegible] $\frac{2}{3}n$ [illegible]

$\frac{4n}{3} = 2n \cdot \frac{2}{3}$; [illegible] a_i და b_i-სთვის [illegible] $i \in 1..n$ [illegible] $\frac{4n}{3}$ [illegible] ~~[illegible]~~ $2n$ [illegible] $2n$ [illegible]

[illegible] c_1, c_2, c_3, c_4 [illegible] c-ები [illegible] b-ები [illegible] b-ს [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] 4-ის [illegible]

[illegible] c-ებიდან $c_1 = a_x$ $c_2 = a_y$ $c_3 = a_z$ $c_4 = b_t$ [illegible] b_{t-1} [illegible] a_t [illegible] 4-ჯერ [illegible]

[illegible]:

და ახლა მოიძებნება [illegible] ~~[illegible]~~ რიცხვები [illegible] [illegible].

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] და [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]. ~~ახლა~~ [illegible] [illegible] რომ b_t [illegible] a_t-ში [illegible] [illegible] [illegible] ში

[illegible] ანუ [illegible] $t=x$ ან $t=y$ ან $t=z$ ~~[illegible] b_t [illegible] რომ b_t ში [illegible]~~

[illegible] [illegible] [illegible] $t=x$ [illegible] [illegible] b_t ში [illegible] a_x-ს [illegible]

$a_x=a_t$ და b_t და a_t [illegible] ში [illegible] [illegible] [illegible].

~~ახლა~~ [illegible] h-იდან [illegible] $2h$-მდე [illegible] რომ [illegible] ში [illegible]

[illegible] რომ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

[illegible] $h=4$-ისთვის [illegible] [illegible] [illegible] და [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] და [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible]

~~[illegible]~~ რომ [illegible] [illegible] ში [illegible] და $2h$ [illegible] რომ [illegible]

[illegible] მოიძებნება [illegible] [illegible] [illegible] ში [illegible]. ანუ $h=4$-ისთვის [illegible]

h-იდან $2h$-მდე [illegible] ანუ 2-ის [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

h-ით $h-1$-მდე [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] h-ისთვის [illegible] და 2012-ისთვის

[illegible].

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] რიცხვები [illegible] [illegible] [illegible] $\left[\frac{2}{3}h\right]$ [illegible]

და ~~[illegible]~~ [illegible] 4-ზე მოიძებნება [illegible] რიცხვები [illegible] ში [illegible] და

[illegible] $h-1$-ისთვის [illegible].

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] მოიძებნება [illegible] [illegible] [illegible] რიცხვები

[illegible] ში [illegible] და [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] $\left[\frac{2}{3}(h-1)\right]$.

$a-b = a^n \cdot c - b^n \cdot d \qquad |c-d|=1$

$|c-d|=1 \Rightarrow \begin{cases} c-d=1 \\ c-d=-1 \end{cases} \qquad c = 1+d \qquad d+1=c$

ორივე ტოლობა ერთნაირ შემთხვევაა ამიტომ განვიხილავ მხოლოდ ერთ შემთხვევას $c=1+d$.

$a-b = a^n \cdot c - b^n \cdot d$

$a-b = a^n(1+d) - b^n \cdot d$

$a-b = a^n + d a^n - b^n \cdot d$

$a-b = a^n + d(a^n - b^n)$

$\left.\begin{matrix} a^n - b^n \vdots a-b \\ a-b \vdots a-b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^n \vdots a-b \Rightarrow$

$a^n = (a-b)k \Rightarrow$

$\Rightarrow a-b = \frac{a^n}{k}$ ანუ

$\sqrt[n]{a-b} = a\sqrt[n]{\frac{1}{k}}$ ანუ ეს $\sqrt[n]{\frac{1}{k}}$ - მთელია

$\cancel{a-b} \qquad a-b = \frac{a^n}{k} \Rightarrow \qquad b = a - \frac{a^n}{k}$

$\frac{a^n}{k} = a^n + d \cdot \left(a^n - \left(a - \frac{a^n}{k}\right)^n\right)$

$\frac{1}{k} = 1 + d\left(1 - \left(1 - \frac{a^{n-1}}{k}\right)^n\right)$